

## 第2回 電子工学で用いる数学と物理現象を結びつける

TDU



本講義「電子工学で用いる数学と物理現象を結びつける」は、受講生の方々から書籍化のご要望が多かったため、電波技術協会誌「FORN」2014年9月号～2015年5月号に連載記事として執筆しました。電波技術協会殿の御好意により、以下のURLよりその記事を無料でダウンロードできます。

<http://amplet.tokyo/nebiya/page09forn.html>

初版：2017年4月6日  
更新：2017年4月16日

講義資料は  
<http://amplet.tokyo/tdu>  
からダウンロードできます。

ユビキタス無線工学  
担当：根日屋 英之

2017年4月13日

1

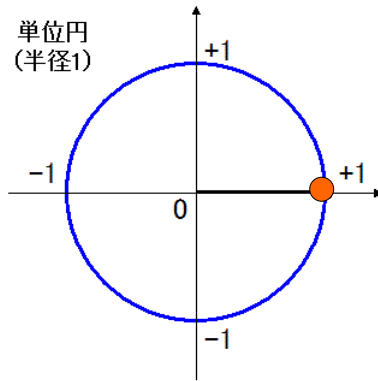
数学と物理現象を結びつけるもの  
それは半径1の単位円だった。

2017年4月13日

2

数学と物理現象を結びつけるもの → それは半径1の単位円

TDU



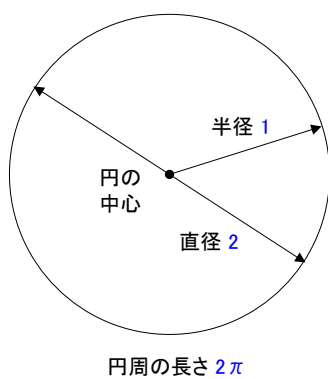
2017年4月13日

3

全ての基本は半径「1」の円(単位円)から始まる

TDU

単位円



半径 1 の円(単位円)において

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{直径は } & \text{半径} \times 2 \\ & = 1 \times 2 \\ & = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{円周の長さは } & \text{直径} \times \text{円周率} \\ & = 2 \times \pi \\ & = 2 \times 3.14 \end{aligned}$$

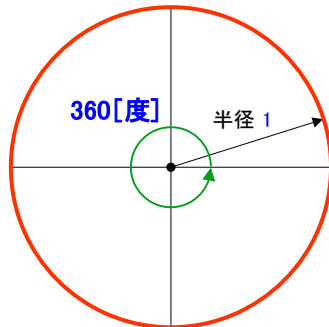
2017年4月13日

4

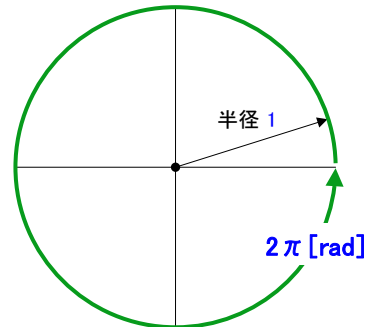
# 数学屋さんと物理屋さんが共通認識を持つには・・・

TDU

単位円



単位円



数学屋さんの1周は 360[度]

物理屋さんの1周は 2π [rad]

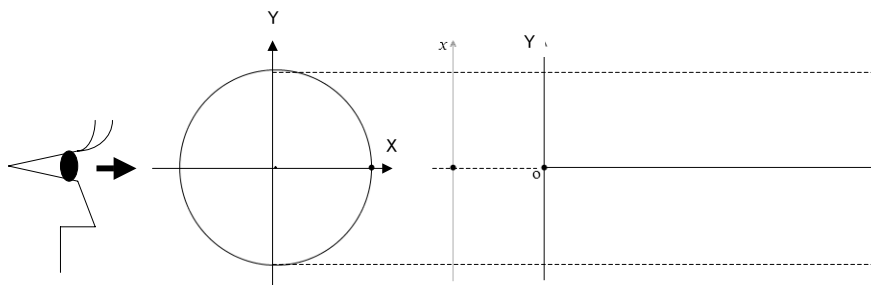
$360[度] = 2\pi [rad]$

2017年4月13日

5

# 回転振り子は側面から見ているとどのように見えるか？

TDU



等速で回転している振り子 半径1の単位円  
を側面(X軸の負の方向)  
から見てみる。

時間の経過

2017年4月13日

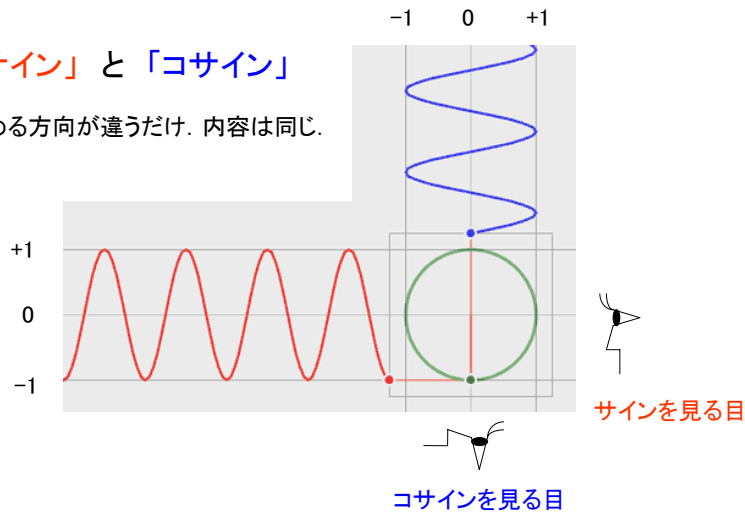
6

# 正弦関数(サイン)と余弦関数(コサイン)

TDU

## 「サイン」と「コサイン」

は見つめる方向が違うだけ. 内容は同じ.



2017年4月13日

7

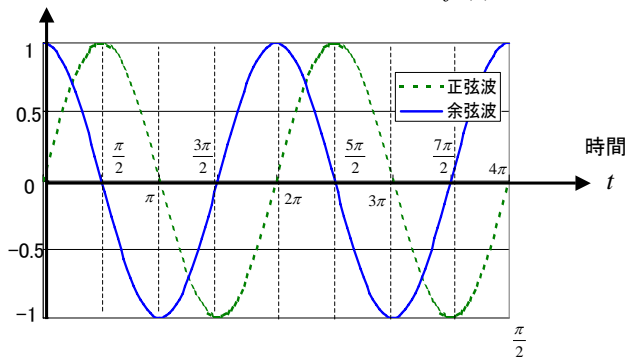
# 正弦関数(正弦波)と余弦関数(余弦波)

TDU

振幅  $f(t)$

正弦波 :  $f(t) = \sin \theta$   
 余弦波 :  $f(t) = \cos \theta$

三角関数  
 正弦波と余弦波  
 のグラフは右図の  
 ようになる.



2017年4月13日

8

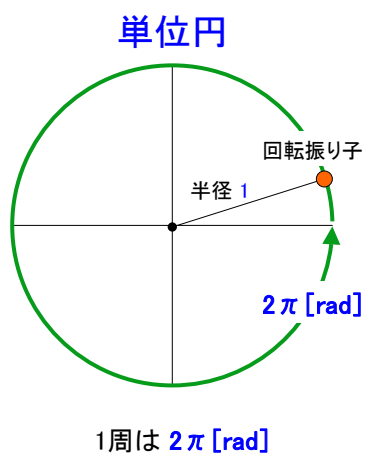
## 波動関数は「道のり＝速度×時間」

2017年4月13日

9

## 周波数 $f$ と角速度 $\omega$

TDU



### 回転振り子を考える.

1秒間に回転振り子が  $f$  周 回転すると

その回転振り子が動いた距離  $\omega$  は

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi (\text{1周の長さ}) \times f (\text{回転}) \\ &= 2\pi f\end{aligned}$$

となる.

ここで  $f$  を周波数 (単位は Hz),

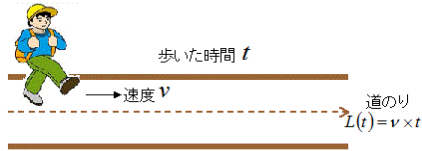
$\omega$  を角速度 (単位は rad/秒) と呼ぶ.

2017年4月13日

10

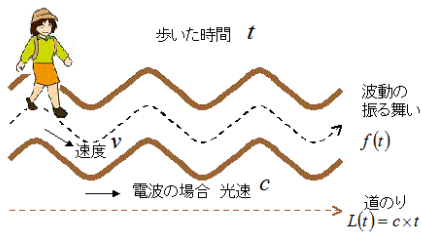
# 波動関数は「道のり＝速度×時間」のようなもの

TDU



歩いた道のり  $L(t) = v \times t$

↑ 速度  
↑ 歩いた時間



波動の振る舞い  $f(t) = \sin(v \times t)$

↑ 速度 ↑ 歩いた時間  
くねくね歩いたという意味

$= \sin(2\pi f \times t)$

↑ 1秒間に進む距離 = 円周長 × 周波数

$= \sin(\omega \times t)$

↑ 角速度 ↑ 歩いた時間

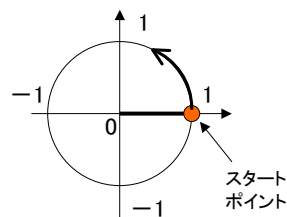
歩いた道のり  $L(t) = c \times t$

2017年4月13日

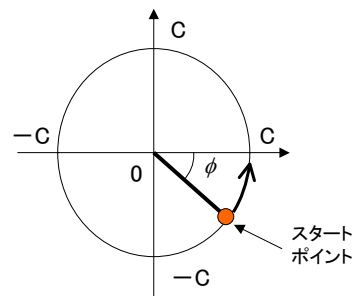
11

# 波動関数

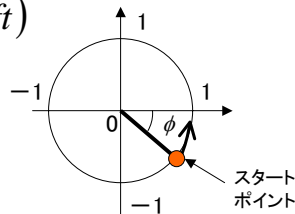
TDU



$f(t) = \sin(2\pi ft)$



$f(t) = C \sin(2\pi ft - \phi)$



$f(t) = \sin(2\pi ft - \phi)$

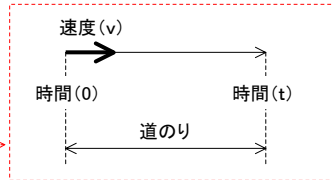
2017年4月13日

12

# 波動関数は道のり

[基本]

・ 道のり = 速度(v) × 時間(t)



[波動関数では]

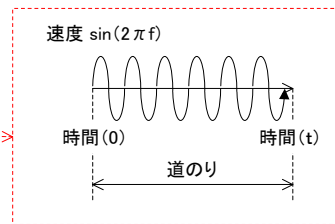
・ 1秒間に進む距離(速度 v)  
 = 速度単位円1周の長さ (2π) × 1秒間の回転数(周波数 f)  
 = 2πf

速度(v)

・ t秒間で進む距離 = 2πft

電波は交流なので、sinで表記すると、  
 電波の波動関数は、

⇒ 道のり = 速度(v) × 時間(t)  
 = sin(2πft) = sin(ωt)

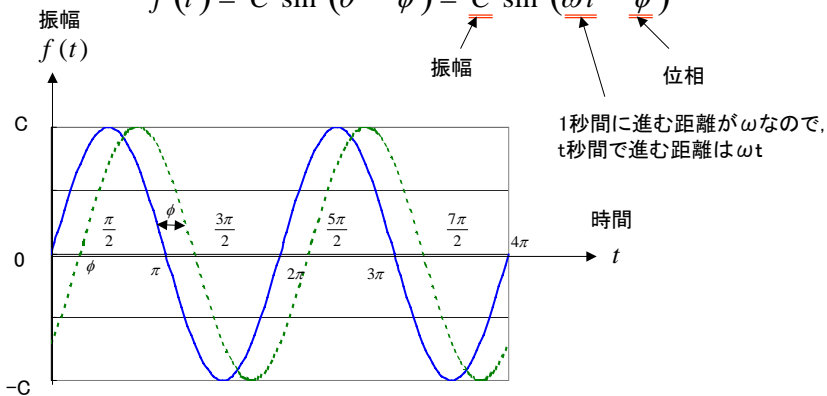


2017年4月13日

# 正弦波の振幅, 角周波数, 位相の表現

交流信号や高周波信号を正弦波として表現すると,

$$f(t) = C \sin(\theta - \phi) = C \sin(\omega t - \phi)$$



2017年4月13日

## 1-3. 複素表示の世界

2017年4月13日

15

### 複素数って何だ？ 単なる表記の手段にすぎない

TDU

「複素数」  $z = x + iy$

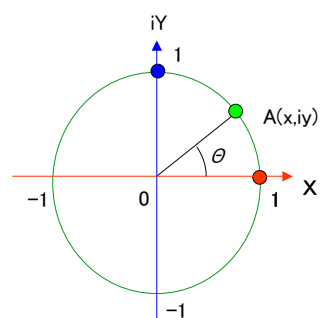
一つの式に二つの世界を同時に書きたいだけ。

実数(x) ... 現実の世界

虚数(y) ... 空想の世界

その他の場所 ... 現実と空想の世界

空想の世界には、空想の世界だよ  
という虚数単位をあらわす「 $i$ 」をつける。



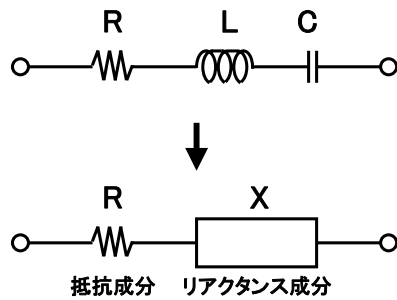
2017年4月13日

16



## 例えば、インピーダンス

TDU



全ての電子回路はR, L, C  
の直列回路の等価回路で表  
され,

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= R + jX$$

で与えられるZをインピーダ  
ンスという。ここで、 $\omega$ は角速  
度(角周波数)で、fを周波数  
とすると、 $\omega = 2\pi f$ となる。

2017年4月13日

17

## インピーダンス平面

TDU

インピーダンス平面の  $R \geq 0$  の  
範囲の

R=一定

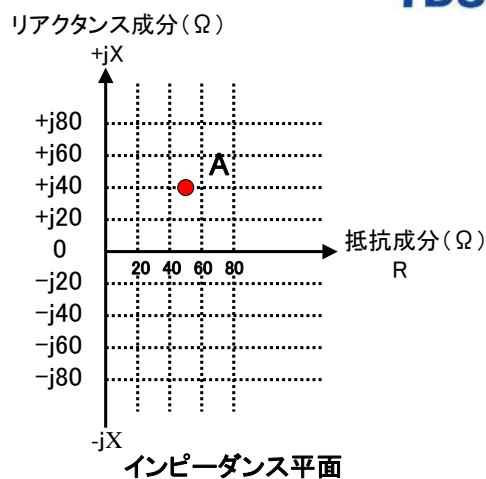
X=一定

の直線群を平面に写像した図表

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= R + jX$$

$$= 50 + j40$$



根日屋 英之, 植竹 古都美:「ユビキタス無線工学と微細RFID」(第2版)(東京電気大学出版局)より転載

2017年4月13日

18

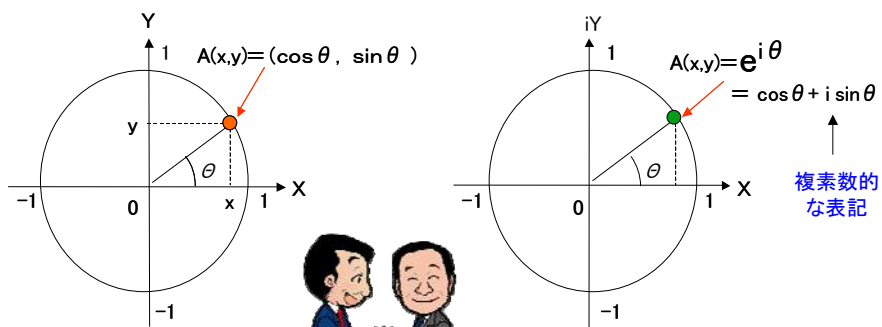
## 1-4. 角度を簡単に表す

2017年4月13日

19

## オイラー表記

TDU



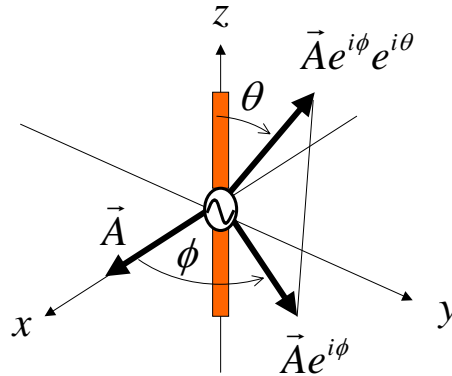
どちらの表現も振り子 ● の位置を示している。

2017年4月13日

20

## オイラー表記

TDU



2017年4月13日

21

## オイラー表記は指数関数

更新：2017年4月16日

TDU

指数関数の便利なところは、掛け算、割り算を足し算、引き算で計算できる。

$$\begin{cases} e^a \times e^b = e^{(a+b)} \\ e^a \div e^b = e^{(a-b)} \end{cases}$$

2017年4月13日

22

## 直流回路のオームの法則

更新：2017年4月16日

TDU

$$\text{電圧 (V)} = \text{電流 (I)} \times \text{抵抗 (R)}$$

$$\text{電力 (W)} = \text{電圧 (V)} \times \text{電流 (I)}$$

$$= \text{電圧 (V)}^2 \div \text{抵抗 (R)}$$

$$= \text{電流 (I)}^2 \times \text{抵抗 (R)}$$

2017年4月13日

23

## 交流のインピーダンスの計算

更新：2017年4月16日

TDU

三角関数です！

$$\text{ピーク電圧： } V_p = \sqrt{2}V_{rms} \sin(\omega t - \phi_V)$$

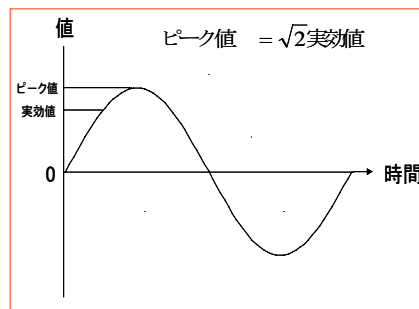
$$\text{ピーク電流： } I_p = \sqrt{2}I_{rms} \sin(\omega t - \phi_I)$$

インピーダンスZは

$$Z = R + jX = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\sqrt{2}V_{rms} \sin(\omega t - \phi_V)}{\sqrt{2}I_{rms} \sin(\omega t - \phi_I)}$$

↑  
↑  
現実の世界

空想の世界



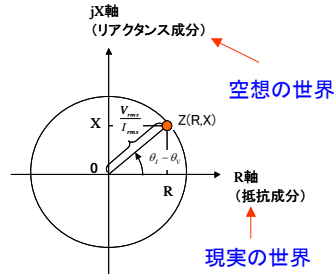
2017年4月13日

24

## 三角関数の計算(割り算)にオイラーの式

TDU

$$\begin{aligned}
 Z &= R + jX = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\sqrt{2}V_{rms} \sin(\omega t - \phi_V)}{\sqrt{2}I_{rms} \sin(\omega t - \phi_I)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}V_{rms} e^{+j(\omega t - \phi_V)}}{\sqrt{2}I_{rms} e^{+j(\omega t - \phi_I)}} \\
 &= \frac{V_{rms} e^{+j(\omega t - \phi_V)}}{I_{rms} e^{+j(\omega t - \phi_I)}} \\
 &= \frac{V_{rms}}{I_{rms}} e^{+j\{(\omega t - \phi_V) - (\omega t - \phi_I)\}} \\
 &= \frac{V_{rms}}{I_{rms}} e^{+j(\phi_I - \phi_V)}
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases}
 R = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} \cos(\phi_I - \phi_V) \\
 X = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} \sin(\phi_I - \phi_V)
 \end{cases}$$

更新：2017年4月16日

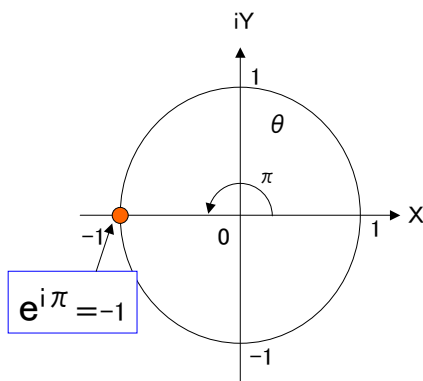
2017年4月13日

25

## オイラーの等式

… それはミステリアスな世界で一番綺麗な公式だった

TDU



$$e^{i\pi} + 1 = 0 \dots \text{美しい}$$

e…ネピア数: イギリス人 John Napier が発見した無限に続く無理数.  $e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352 \dots$

$\pi$ …宇宙の果てまで続いてゆく円周率 :  $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288 \dots$

i…一つの式の中に二つの現実の世界と空想の異次元の世界を同時に表したいときに、異次元の世界の式をまとめてカッコでくくり、その前に異次元だよと宣言するためにつけた決して正体を現さない虚数 ( $i^2 = -1$  という現実の世界ではありえない空想の世界だよということ、一番基本的な整数「1」と極性「-」で知らせたい。)

このまったく無関係なような三つの数、eをi $\pi$ 乗して、それに1を加えるとその結果は0、すなわち「無」になる。このオイラーの等式の等式は、この世で最も美しい数式の一つといわれている。

2017年4月13日

26

## 電磁気学も オームの法則で解けるのか？

2017年4月13日

27

## なんでもオームの法則

TDU

電子工学(回路設計)はオームの法則

でほとんど解ける。無線通信で必須の

電磁気学 だって オームの法則

でほとんど解ける。概して日本の無線業界の技術者は、電子工学と電磁気学は別物と思っているので、電子工学を学んだものは電磁気学が嫌い。電磁気学を学んだものは電子工学が苦手。

2017年4月13日

28

## 電磁気学もオームの法則でできるのか？

TDU

できる！

球面において、各部の電力密度  $P_d$  [W/m<sup>2</sup>] を全球面で積分すると放射源の電力と等しくなる。電界強度を  $E$ 、磁界を  $H$ 、自由空間のインピーダンスは  $120\pi$  [Ω] とおくと、 $E = 120\pi H$  なので、

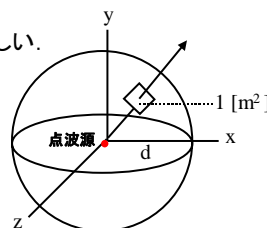
$$P_d = EH = \frac{E^2}{120\pi} = 120\pi H^2 \quad \longleftrightarrow$$

$$\text{オームの法則} \quad P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

となる。等方性アンテナ(点波源)は、 $P_d$  はどの点でも等しい。ここで、半径= $r$ の球では、その表面積 $S$ は  $4\pi r^2$  なので、

$$P = 4\pi r^2 P_d$$

となる。



2017年4月13日

29

## 蛇足

TDU

空間インピーダンス  $\eta = 376.730314$  が正しくて、 $120\pi$  は近似値。

それを知る学生も大人も少なく、逆と思っている人が多い。

わずかに  $0.69/1000$  の違いであるが、私も学校で習った記憶が無い。

蛇足：

光速  $c = 299,792,458$  [m/s] で、人間が透磁率  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  と決めた。

$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$  より、誘電率  $\varepsilon = 1/(\mu c^2) = 8.85418782 \times 10^{-12}$  なので、

$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 376.730314$  [Ω] (あるいは  $\eta = \mu c$ ) と半端な数となる。

\* 時間も長さも、単位を人間が勝手に決めた。  $\mu$  だけは数学の美を持たせたけれど、手遅れでした。

2017年4月13日

30