

全世代にむけた産学人無線通信技術講座

～その5 マックスウェルの方程式～

私が大学4年生のときの就職活動において、企業の技術面接で、「あなたは、アマチュア無線を楽しんでいます。電磁波の存在を予言したマックスウェルの方程式を、高校生にもわかるように説明してください。」と質問された。私はこの難しい質問に対し、当時、どのように答えたかを覚えていないが、今でもこの質問を忘れることができない。そこで、改めて、マックスウェルの方程式を、高校生にわかるように説明することに挑戦したいと思う。

株式会社 アンプレット
根日屋 英之



電波の不思議を体験中の高校生

はじめに

今の若い世代の人たちは、携帯電話は無線で繋がってあたり前ようになってしまい、無線に対しての驚きや感動が薄いように思える。ところが、私と同世代の人は、昔、海外のテレビドラマで、腕時計に向かって話しかけると、無線で別の国にいる人と会話をしているシーンを見て、こんな世の中が本当にくるのかと、半信半疑で未来を夢見ていた。

私たちが無線通信の恩恵にあずかれるのは、マックスウェルのおかげである。

マックスウェルという人

マックスウェル (James Clerk Maxwell, 1831～1879年) は、電磁波の存在を予言したスコットランドの物理学者である。その予言の後で、ドイツの物理学者、ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz, 1857～1894年) が、マックスウェルが明らかにしていなかったその空中伝播 (伝搬) を、1888年に実験的に実証 (ヘルツの実験) した。マックスウェルは高校生の頃から数学が好きで、15歳のときに楕円の描き方についての独創的な研究をエジンバラ王立協会に提出している。また、イギリスの自然哲学者であるファラデー (Michael Faraday, 1791～1867年) の電磁場理論を基に、流体力学との類推を数学的に記述する研究に没頭し、1861年に「物理学的力線について」を発表した。そ

の後1864年に、電気と磁気を統一的に表す一連の方程式「電磁場の動力学的理論」を確立し、さらに電束電流の考えを導入して、ついに電磁波の存在を理論的に予言した。その方程式から電磁波の伝播する速度が光の速度に等しいことを証明し、光も電磁波の一種であることも理論的に結論づけている。

磁界と電界

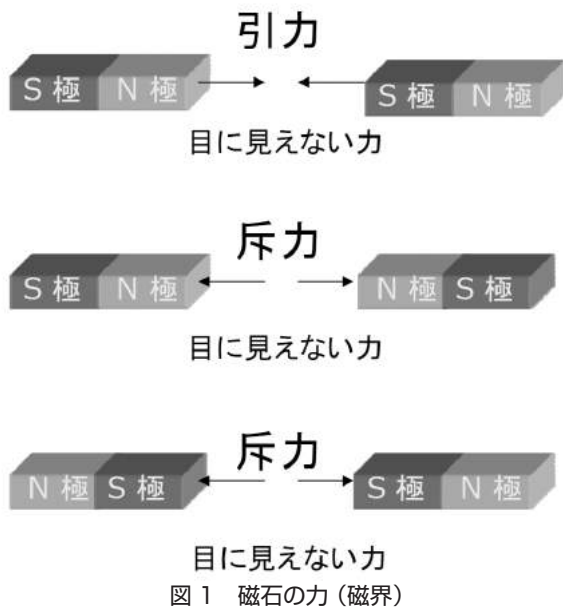
高校生にもわかるようにマックスウェルの方程式を説明するにあたり、磁界 (磁場と同義) と電界 (電場と同義) という言葉が出てくる。界 (場) とは、空間で目に見えない「力 (引力や斥力)」が存在する場所を指す。このような言葉の定義だけではイメージもつかみにくいと思うので、磁界と電界を具体的な事例で説明する。

磁界

図1に示すように、二つの磁石を準備して、異極であるN極とS極を向かい合わせて近づけると、磁石間には引力が働き二つの磁石は引き合う。逆に、二つの磁石で同極であるN極とN極、またはS極とS極を向かい合わせ近づけると、空間には斥力が働き二つの磁石は反発する。磁石によって空間に力が働く場所を磁界 (磁場) と呼ぶ。

電界

電気も空間に目に見えない力を発生する。図2に示すように、下敷きを脇の下に挟み、そこでこすると、下敷きに静電気が発生する。その下敷きを頭の上にかざすと髪の毛が下敷きに向かって逆立つ。これは下敷きと人体の二つの物体が帯電している電荷の差により、空間に引力が働く場所が存在することを証明する実験でもある。この場所を電界（電場）と呼ぶ。



プラスチックの下敷き

静電気で髪の毛が下敷きに引きつけられる。



図2 電気力（電界）

マックスウェルの方程式

マックスウェルの方程式を高校生にもわかる説明に挑戦するので、この道の専門家の方々には、言葉の使い方などを寛大な気持ちで読み流していただきたい。

図式1にマックスウェルの方程式として記述される四つの式を示す。マックスウェルの方程式には難しい数式がたくさん出てくるが、その式を見ていると頭痛がしてくる人は、式の意味を図式2に示すような内容と理解しよう。例えば、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は時間と共に変化するということであるので、 $\frac{\partial}{\partial t}$ が出てきたら、「おっ、これは、交流（高周波）のときに起こる現象なのだ。」と思ってしまう、数式が身近に感じられると思う。

図式1の(1)の説明

この式を説明するとき、まず、アンペールの右ねじの法則を説明する。フランスの物理学者、アンペール（Andre Marie Ampere, 1775 ~ 1836年）は、1820年、コペンハーゲン大学教授、エルステッド（Hans Christian Oersted, 1777 ~ 1851年）が、電流の流れている電線を磁針に近づけると、磁針がふれることを発見したことに興味を持ち、実験で2本の電流の間に働く力を観測し、その実験結果を「アンペールの法則」にまとめた。図3に示すように電線に電流Iが流れると、電流の進む方向に進む右ねじのように、電線の周りには右ねじの回転方向に磁界Hが発生する。これが、「アンペールの右ねじの法則」である。

図式1の(1)の右辺の前半 $rot \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ を見ると、図4(a)に示すように、電線に電流 \vec{J} が流れると、それが直流電流でも交流電流でも、磁界 \vec{H} が電線の周りに回転（rotation、図式2の rot）して現れる。これは、アンペールの法則からわかる。では、図式1の(1)の右辺の後半 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ は何を意味しているのだろうか？

図4(b)はみなさんもよく知っている電子部品のコンデンサであるが、コンデンサは2枚の電極平板を対向

$$\begin{cases}
 rot \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} & \dots (1) \\
 rot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & \dots (2) \\
 div \vec{B} = 0 & \dots (3) \\
 div \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \dots (4)
 \end{cases}
 \begin{cases}
 \vec{H}: \text{磁界ベクトル} \\
 \vec{D}: \text{電束密度ベクトル} \\
 \vec{E}: \text{電界ベクトル} \\
 \vec{B}: \text{磁束密度ベクトル} \\
 \vec{J}: \text{電流面密度ベクトル} \\
 \rho: \text{電荷密度} \\
 \epsilon_0: \text{真空の誘電率} \\
 (8.854 \times 10^{-12} [F/m])
 \end{cases}$$

図式1 マックスウェルの方程式

- rot : 回転(ローテーション)
 - ベクトル演算子の外積
 - ⇒ 「円を描くようにクルクル回っている。」と理解しよう。
- $\frac{\partial}{\partial t}$: 時間 t の偏微分の表記
 - 時間 t とともに値が変わっている。
 - ⇒ 極論であるが、この偏微分の表記を見たら、「時間と共に値が変化するとき(もちろん、交流も含まれる)に起こるのだ。」と思ってよい。
- div : 発散(ダイバージェンス)
 - ベクトル演算子の内積
 - 二つのベクトルの強さの合計
 - ⇒ 「湧き出すか」「吸い込むか」の状態を示している。

図式 2 マックスウェルの方程式に出てくる数式

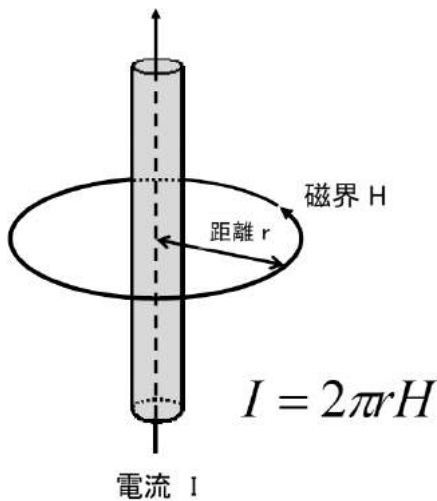


図 3 アンペールの法則

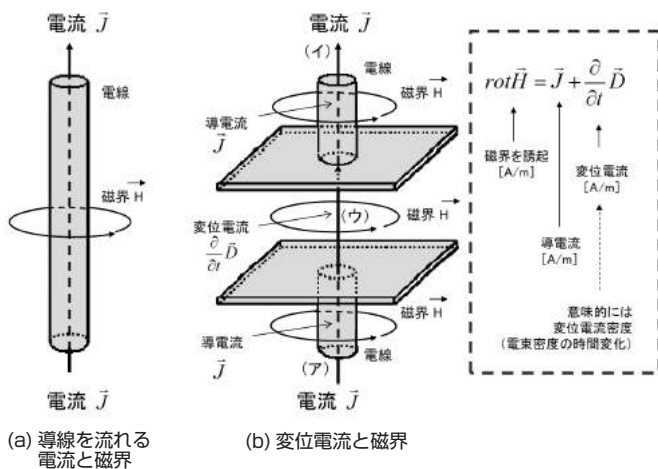


図 4 「図式 1 の (1)」の示すこと

させて、そこにリード線(電線)を付けた電子部品である。コンデンサはリード線が直流的につながっていない部品なので直流電流は流れないが、不思議なことに交流電流は流れる。交流であれば、図 4 (b)の(ア)から流し込んだ電流 \vec{J} は(イ)に抜けてくるのである。これは、リード線が存在しない(ウ)の部分にも電流が流れていることになる。この(ウ)の空間に流れている電流を「変位電流」と呼ぶ。

図式 2 で書いたように、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は「交流のときに」という条件を表しているが、マックスウェルは、ここを流れる交流電流を $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ と表現した。この電流(変位電流)が流れると、そこにも、磁界 \vec{H} が回転して (rot) 現れることを示したのが、図式 1 の (1) の右辺の後半となる。

電界の表記は、例えば距離が 3cm で対向している電極のそれぞれに、1V と 7V の電圧をかけると、3cm の空間に 7V-1V = 6V の電位差があるので、6V/3cm = 2V/cm となる電圧の傾き分布ができる。これを電界強度と呼ぶ。電界の分布は、気象図の等圧線に似ていて、隣り合う等圧線の間隔が狭いと、そこには強い風が吹く。等電位のところを結ぶと、空間には等圧線のように電圧の分布図を書くことができ、隣り合う等電位の線の間隔は狭いほど、電界強度が強くなる。

一方、電線を通る電流を、変位電流と区別して「導電流」と呼ぶ。

図式 1 の (2) の説明

図 5 に示すように、電流 \vec{J} が流れて発生した磁界は、その電流を打ち消すようにループ状の変位電流が空間に流れる。これはファラデーが発見した電磁誘導現象(コイルの中を貫く磁界線が変化しようとする、コ

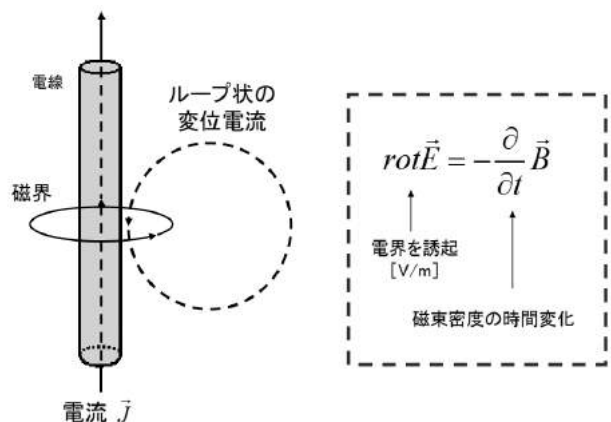


図 5 「図式 1 の (2)」の示すこと

イルは、その磁力を打ち消そうとする反対向きの磁力を発生させようとして、コイルに電位差が発生し、電流が流れる。)とも共通した認識である。

電界 \vec{E} は、電流 \vec{J} を打ち消す(-は打ち消すことを意味している)向きに発生するので、 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ は、ループ状に回っている(rot)電界 \vec{E} を、 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ に「-(マイナス)」をつけて $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ と表現し、図式1の(2)に示す $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ となった。

図式1の(3)の説明

divは、ベクトルがある微小領域からどれだけ湧き出すか、または、吸い込むかを表すベクトル演算子(演算子とは数学のルールで、+、-、×、÷も演算子)である。

図6に示すように、磁石は一般的にN極とS極を有し、その磁力線はN極からS極に向かってループ状に出ている。当時も現代の電磁気学と同様に、単一の磁極(N極のみの磁石やS極のみの磁石)は存在しないとしているので、それを $div\vec{B}=0$ (磁力線は、湧き出しもしないし、吸い込むこともない。)と表現した。

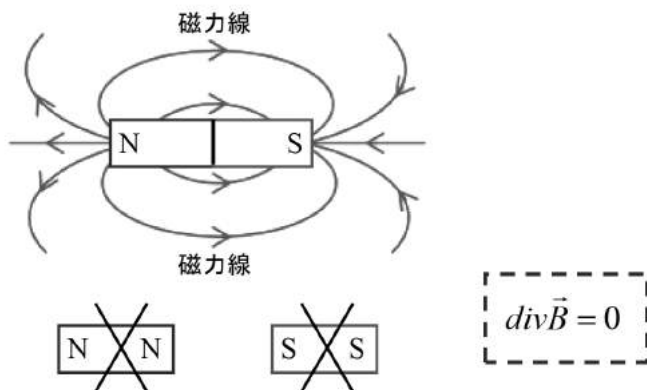


図6 「図式1の(3)」の示すこと

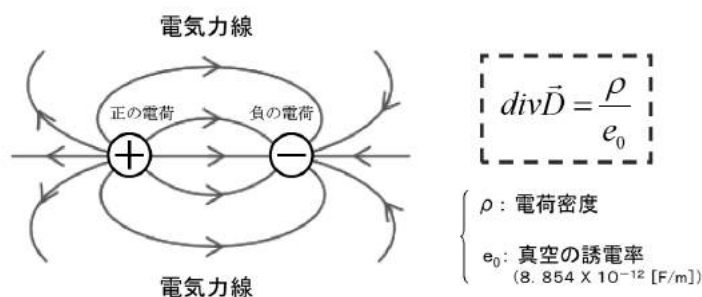


図7 「図式1の(4)」の示すこと

$$\begin{cases}
 \text{アンペールの法則} \\
 \text{マックスウェルの変位電流} \\
 \text{単極磁化の否定法則} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots (1) \\
 rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (2) \\
 div\vec{B} = 0 \quad \dots (3) \\
 div\vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots (4)
 \end{array} \right. \\
 \text{ファラデーの法則} \\
 \text{クーロンの法則}
 \end{cases}$$

図式3 マックスウェルの方程式は先人たちの集大成

図式1の(4)の説明

空間に電荷が存在する場合、正(+)の電荷は電気力線の湧き出し口、負の電荷(-)は吸い込み口と考える。電気力線は電荷から放射状に湧き出している(または吸い込まれている)状態を、有限値の $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ と、divを用いて $div\vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ と表現している。

以上に説明したマックスウェルの方程式は、図式3に示すように、先人物理学者たちの研究の集大成でもある。図式1に示した式が、みなさまにとって身近に感じられれば幸いである。

本誌300号(2014年9月号)から始まりました全5回の連載、「全世代にむけた産学人無線通信技術講座」は、今回で最後となります。本講座に対して、貴重なアドバイスやコメント、ご質問をいただきましたみなさま、そして、最後までご愛読いただきました読者のみなさまにお礼申し上げます。

謝辞

本記事を連載するにあたり有益な御助言を賜りました、峰光電子株式会社、アンリツカスタマーサポート株式会社、株式会社A.C.S.、株式会社アンプレットのみなさま、私と電磁界の研究を行っているBUDの会(<http://amplet.com/bud>)の小暮裕明氏、山村英穂氏、および、一般財団法人電波技術協会の査読委員のみなさま、編集担当の杉山博氏、松浦美恵氏に感謝致します。

参考文献

- [1]小暮裕明、小暮芳江、「無線の歴史に学ぶ」、CQ HAM Radio、CQ出版社、2014年5月号～
- [2]根日屋英之、山村英穂、小暮裕明、谷澤哲、横浜みどりクラブアンテナ勉強会資料
<http://home.a02.itscom.net/jh1ymc/Menu13.html>